論文の内容の要旨

論文題目

On the Isomorphism Problem of Coxeter Groups and Related Topics
（コクセター群の同型問題及び関連する話題について）

氏　　名　　　縫田　光司

本学位論文では、コクセター群の**同型問題**（即ち、二つのコクセター群が互いに同型となる条件やその同型写像の性質を調べる問題）及び関連する話題について論じる。**コクセター群**とは、生成元と基本関係による群表示のうち**コクセター表示**と称される特別な表示を持つ群のことであり、それらは（一般には退化した）双線型形式を持つ実ベクトル空間上の鏡映群として実現できる。上述の同型問題は、与えられたコクセター群における（コクセター群としての）生成系の多様性を調べる問題とも換言でき、コクセター群に関する近年の研究で最も発展した分野の一つである。例えば、共にコクセター群である正六角形の合同変換群と２次及び３次の対称群の直積群は、互いに異なるコクセター表示を持つものの抽象群としては同型であり、この例からも同型問題が自明な問題ではないことを見て取れる。この問題は、以下の通り、有限生成なものなど様々なクラスのコクセター群に限定された形で主に研究されてきた。本論文では、有限生成とも限らない一般のコクセター群の同型問題を研究し、その問題を既約コクセター群の場合に帰着させるとともに、コクセター群の間の同型写像が鏡映を保つための充分条件を与える。またその過程で、無限既

約コクセター群の直既約性やコクセター群の自己同型群の構造など、以下に詳述するような関連する結果も与える。

コクセター群の同型問題の起源は、 H. S. M. Coxeter 氏が１９３５年に与えた（今の言葉で言う）有限コクセター群のコクセター表示の分類にある。任意のコクセター群は、**既約成分**と呼ばれる**既約**な（即ち、異なる集合に属する生成元が互いに可換となるように生成系を分割できない）コクセター群の（制限）直積に分解できるため、コクセター群が既約な場合が本質的である。氏の結果より、二つの有限既約コクセター群が同型ならばそのコクセター表示は同一であることが従う。（なお、コクセター群の既約性は一般にコクセター表示の選び方に依存する。冒頭に挙げた例では、正六角形の合同変換群は既約コクセター群であるが、対称群の直積群は既約コクセター群ではない。）

その半世紀余り後、１９９１年に A. M. Cohen 氏は自身の講義録において、「無限既約コクセター群のコクセター表示は一意的か」という問いを提示した。B. Mühlherr 氏は２０００年の論文において、コクセター表示が異なるが互いに同型な無限既約コクセター群を具体的に構成して Cohen 氏の問いに否定的な解答を与えた。その同型写像の構成法は、氏自身ら数名による２００２年の論文にて「コクセター図形の捻り」という一般的な操作へと昇華された。そこでは、二つのコクセター群の間の同型写像が鏡映を保つならば、両者のコクセター表示は有限回の「捻り」によって互いに移り合うであろう、との有力な予想も提示されている。

一方、 R. Charney 及び M. Davis の両氏は２０００年の論文で、ある幾何学的な条件を満たすコクセター群（アフィンコクセター群を含む）のコクセター表示が一意的であることを示した。また、二つの生成元の積の位数が限定された「直角」「斜角」「偶」と称されるクラスのコクセター群の同型問題が、それぞれ D. G. Radcliffe 氏、 Mühlherr 及び R. Weidmann 両氏、 P. Bahls 氏によって詳しく研究されている。

現在では、もし「捻り」に関する上述の予想が証明されれば、有限生成なコクセター群の同型問題の完全解答が得られる段階まで研究が進んでいる。しかしながら、これら先行研究の殆どは有限生成な場合に限られており、一般のコクセター群に関してはごく僅かしか知られていないのが現状である。本研究の目的の一つは、有限生成とは限らない一般のコクセター群の同型問題に対する突破口を開くことである。

本論文は二編の論文を組み合わせたものであり、第一部と第二部の題名は各論文の題名である。第一部では、コクセター群の有限既約成分全ての積（**有限成分**と称する）に、無限既約成分の同型類の（重複度を込めた）全体を合わせると、コクセター群の同型類の完全不変量をなすことを示す（定理３．４）。これは一般のコクセター群の同型問題が、無限既約成分同士の同型性判定、即ち無限既約コクセター群の同型問題に帰着されることを意味する。（なお、有限成分同士の同型性判定は難しい問題ではなく、定理３．４でその方法の一つを述べる。）他にも定理３．４において、（各既約成分はそうでないにもかかわらず）コクセター群の有限成分が生成系の選び方に依らず一意に定まることを示し、コクセター群の間の同型写像を既約成分の置換と中心的同型写像の積に分解する。更にこれに基づき、コクセター群の自己同型群を既約成分の自己同型群を用いて記述する（定理３．１０）。

なお、対象となるコクセター群が有限生成の場合には、 これらの結果が L. Paris 氏の２００４年のプレプリントにおいて独立に証明されている。しかし、氏の用いた論法においてはコクセター群の有限生成性の仮定が不可欠であり、本論文で扱う一般のコクセター群に対してはその論法は適用できない。

主結果の証明の過程で、コクセター群における位数２の元で生成される正規部分群の中心化群を全て特定し（定理３．１）、そこから両因子が位数２の元で生成されるような既約コクセター群の中心積分解は自明である（どちらかの因子が中心に含まれる）ことを見出す（系３．２）。無限既約コクセター群の中心は自明なので、系３．２より無限既約コクセター群の直既約性が従う（定理３．３）。一方、主組成列を持つ群の直既約分解に関する Krull-Remak-Schmidt の定理の類似物として、抽象群の直既約分解で全ての因子があるクラスに属するものについて、それら直既約因子の一意性定理（定理３．９）を証明する。このクラスは「そのクラスに属する群の、各因子がまたそのクラスに属する中心積分解は自明である」という性質を持っており、これは系３．２で見出された性質を抽象したものである。定理３．４は、定理３．９と系３．２を合わせて証明される。

第二部では、コクセター群が鏡映独立という性質を持つための充分条件を与える。冒頭で触れたコクセター群の鏡映群としての実現はその生成系の選び方に依存するが、その際に「元が鏡映である」という性質が生成系の選び方に左右されない場合、そのコクセター群は**鏡映独立**であると称される（これは、件のコクセター群から他のコクセター群への同型写像が常に鏡映を保つことと同値である)。鏡映独立なコクセター群は、幾何学的に良い性質を持つと考えられるだけでなく、前述の Mühlherr 氏らの予想と関連して一般のコク

セター群の同型問題においても重要な意味を持つ。

コクセター群の鏡映については、自身以外でその元と可換な鏡映全てが生成する部分群もまたコクセター群となり、従ってその有限成分が考えられる。定理３．７では、その有限成分が、件の鏡映と共役な高々一つの鏡映によって生成されるならば、コクセター群の生成系をどのように選び直しても件の鏡映は再び鏡映となることを示す。この条件を全ての鏡映が満たせばそのコクセター群は鏡映独立となる（実際には、鏡映の共役類の代表系に関して条件を確かめればよい)。なお、この条件は参考論文の結果を用いることで実際に検証が可能であり、本論文と参考論文の結果に基づいて、鏡映独立なコクセター群のいくつかのクラスを後続の論文で与える予定である。例えば、与えられた無限既約コクセター群の生成元が全て互いに共役であるか、もしくは二つの生成元の積の位数が常に有限であれば、このコクセター群は鏡映独立であることが示される。

定理３．７は、コクセター群の間の同型写像による鏡映の像の中心化群と、もとの鏡映の中心化群（これらは互いに同型である）の構造を比較することで示される。参考論文の結果より、これらの中心化群はあるコクセター群とある部分群の半直積であり、そこでの作用は前者の因子のコクセター群としての生成系を保つ。この比較を行うための半直積分解の仕方に依存しない道具として、指数有限な中心化群を持つ位数２の元を（具体的な半直積因子の構造を用いて）全て特定する（定理３．１）。なお、定理３．１は定理３．７の証明以外に、コクセター群の有限成分の一意性の別証明や、コクセター群のある半直積分解の考察などにも応用を持つ（３．２節を参照)。

なお、証明において、それ自身も興味深い対象である、コクセター群の**本質的元**（放物型部分群と共役な真部分群に決して含まれない元）と、コクセター群の生成系を保つ自己同型写像による固定点集合（部分群）を用いる。前者に関しては、 D. Krammer 氏の学位論文や Paris 氏の前述のプレプリントにおける結果を（少し一般化して）第４節で述べる。一方後者に関しては、そのような固定点集合がコクセター群となることが R. Steinberg 氏によって示されて（また後に Mühlherr 氏や難波正幸氏によって別証明が与えられて）いるが、その構造ともとのコクセター群との関係について第５節で述べる。